Etude du produit des matrices de Lorentz sans rotation :
Condition nécessaire et suffissante de commutativité .

A • Guimier

Etude du produit des matrices de Lorentz sans rotation : *Commutativité*

Théorème 1 :

Si le produit M *de* 2 *matrices de Lorentz* $\Lambda(\overrightarrow{\beta'})$ *et* $\Lambda(\overrightarrow{\beta''})$ *sans rotation de paramètre* $\overrightarrow{\beta'} \neq \vec{0}$ *et* $\overrightarrow{\beta''} \neq \vec{0}$ *vérifient* $M = \Lambda(\overrightarrow{\beta'}) \cdot \Lambda(\overrightarrow{\beta''}) = \Lambda(\overrightarrow{\beta''}) \cdot \Lambda(\overrightarrow{\beta'})$ *alors* $\overrightarrow{\beta'}$ *et* $\overrightarrow{\beta''}$ *sont colinéaires et réciproquement.*
Dans les 2 *cas* M *est sans rotation.*

Démonstration *:*
Commençons par la réciproque :
Posons $\vec{\beta} = \overrightarrow{\beta'}$ *et* $\lambda \cdot \vec{\beta} = \overrightarrow{\beta''}$ *avec* $\lambda \neq 0$.
On rapelle les résultats suivants :

(1) *(Voir par exemple J-M. Souriau."Calcul Linéaire" • PUF 1964 • p.273)*
Si A *et* B *sont* 2 *matrices carrées de même format qui commutent alors*
$exp(A + B) = exp(A) \cdot esp(B) = exp(B) \cdot esp(A)$.

(2) *(J-M. Souriau.*"Calcul Linéaire" *• PUF 1964 • p.378)*
Toute matrice M *de Lorentz peut se mettre sous la forme :*

$$M = exp(\alpha N) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1,$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & {}^tX \\ X & O \end{bmatrix}, \text{ avec } X \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } {}^tXX = 1,\ {}^t\Omega\Omega = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

$$\text{De plus} \quad exp(\alpha N) = \begin{bmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha)\,{}^tX \\ sh(\alpha)X & \left(Id_{\mathbb{R}^{n-1}} + (ch(\alpha) - 1)X\,{}^tX\right) \end{bmatrix}.$$

On rapelle que la décomposition d'une matrice inversible en un produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale est unique.
(3) *dans https://hal-amu.archives-ouvertes.fr/hal-02965773/document p.46*
on démontre que $\vec{\beta} = th\,\alpha.\vec{X}$, $\gamma = ch(\alpha)$ *avec* $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - {}^t\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}}}$,

d'où $\alpha = Argch(\gamma)$ *et* $\vec{X} = coth(Argch(\gamma)) \cdot \vec{\beta}$,
définissons $\varphi(\gamma) = Argch(\gamma) \cdot coth(Argch(\gamma))$.

$$\text{si on pose } A = \varphi(\gamma) \begin{bmatrix} 0 & {}^t\vec{\beta} \\ \vec{\beta} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \lambda \cdot \varphi(\gamma') \cdot \begin{bmatrix} 0 & {}^t\vec{\beta} \\ \vec{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\boldsymbol{\gamma}' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - {}^{t}\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\beta}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\beta}}}}$.

Par unicité $\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{exp}(A)$ *et* $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{exp}(B)$.
On a bien $A \bullet B = B \bullet A$ *donc* $\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}}).\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}).\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}})$.
De plus le produit est égal à $\boldsymbol{exp}(A + B)$ *or la somme de* **2** *matrices symétriques est symétrique ,*
et l'exponentielle d'une matrice symétrique est symétrique donc le produit $\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}}).\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}})$ *est symétrique et*
est donc une matrice de Lorentz sans rotation .

Réciproquement :
Considérons **2** *matrices de Lorentz sans rotation :*

$$\boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}' & {}^{t}(\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\beta}'}) \\ \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\beta}'} & C' \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}'' & {}^{t}(\overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}''\boldsymbol{\beta}''}) \\ \overrightarrow{\boldsymbol{\gamma}''\boldsymbol{\beta}''} & C'' \end{bmatrix} \textit{ avec } \overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'} \neq \vec{0} \textit{ et } \overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''} \neq \vec{0},$$

$$\textit{et leur produit } M = \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) \bullet \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) = \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) \bullet \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & {}^{t}(\boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{\beta}} & C\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix},$$

$$\textit{avec } C' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\boldsymbol{\gamma}'^2\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}\,{}^{t}\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}}{(1+\boldsymbol{\gamma}')},\ C'' = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{\boldsymbol{\gamma}''^2\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}\,{}^{t}\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}}{(1+\boldsymbol{\gamma}'')} \textit{ et } C = Id_{\mathbb{R}^3} + \frac{[\boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{\beta}}]\,{}^{t}[\boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{\beta}}]}{(1+\boldsymbol{\gamma})}$$

alors

$$M = \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) \bullet \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''({}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'\vec{\boldsymbol{\beta}}''+1) & \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\,{}^{t}\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''} + \boldsymbol{\gamma}'\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'C'' \\ \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'} + \boldsymbol{\gamma}''C'\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''} & \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\vec{\boldsymbol{\beta}}'\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'' + C'C'' \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''({}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'\vec{\boldsymbol{\beta}}''+1),$$

$$\vec{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}'\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'} + C'\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}}{\boldsymbol{\gamma}'({}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'\vec{\boldsymbol{\beta}}''+1)} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{\Omega} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \boldsymbol{\gamma}\frac{\vec{\boldsymbol{\beta}}\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}}{(1+\boldsymbol{\gamma})}\right)(\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\vec{\boldsymbol{\beta}}'\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'' + C'C''),$$

$$\textit{avec } Id_{\mathbb{R}^3} - \boldsymbol{\gamma}\frac{\vec{\boldsymbol{\beta}}\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}}{(1+\boldsymbol{\gamma})} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} + \boldsymbol{\gamma}^2\frac{\vec{\boldsymbol{\beta}}\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}}{(1+\boldsymbol{\gamma})}\right)^{-1}.$$

S'il y a commutativité, on a aussi : $\boldsymbol{\Omega} = \left(Id_{\mathbb{R}^3} - \boldsymbol{\gamma}\dfrac{\vec{\boldsymbol{\beta}}\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}}{(1+\boldsymbol{\gamma})}\right)(\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\vec{\boldsymbol{\beta}}''\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}' + C''C')$ *et donc :*

$$\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\vec{\boldsymbol{\beta}}'\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}'' + C'C'' = \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}''\vec{\boldsymbol{\beta}}''\,{}^{t}\vec{\boldsymbol{\beta}}' + C''C'.$$

$$C'.C''=\left(Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma'^2\,\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')}\right).\left(Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma''^2\,\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}\right)$$

$$=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma'^2\,\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')}+\frac{\gamma''^2\,\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}+\frac{\gamma'^2\,\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')}.\frac{\gamma''^2\,\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}$$

$$=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma'^2\,\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')}+\frac{\gamma''^2\,\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}+\frac{\gamma'^2\,\gamma''^2\left({}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}\right)\overrightarrow{\beta'}.\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma')(1+\gamma'')}\ .$$

Et donc

$$\gamma'\,\gamma''\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}+C'\,C''=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma'^2\,\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')}+\frac{\gamma''^2\,\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}+\left(\frac{\gamma'^2\,\gamma''^2\left({}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}\right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')}+\gamma'\,\gamma''\right)\left(\overrightarrow{\beta'}.\,{}^t\overrightarrow{\beta''}\right)$$

De même si on calcule $M=\Lambda\left(\overrightarrow{\beta''}\right)\cdot\Lambda\left(\overrightarrow{\beta'}\right)$:

$$\gamma'\,\gamma''\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}+C''\,C'=Id_{\mathbb{R}^3}+\frac{\gamma'^2\,\overrightarrow{\beta'}\,{}^t\overrightarrow{\beta'}}{(1+\gamma')}+\frac{\gamma''^2\,\overrightarrow{\beta''}\,{}^t\overrightarrow{\beta''}}{(1+\gamma'')}+\left(\frac{\gamma'^2\,\gamma''^2\left({}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}\right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')}+\gamma'\,\gamma''\right)\left(\overrightarrow{\beta''}.\,{}^t\overrightarrow{\beta'}\right)$$

puisque ${}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}={}^t\overrightarrow{\beta''}.\overrightarrow{\beta'}$.

Or

$$\left(\frac{\gamma'^2\,\gamma''^2\left({}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}\right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')}+\gamma'\,\gamma''\right)=\gamma'\,\gamma''\left(1+\frac{\gamma'\,\gamma''\left({}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}\right)}{(1+\gamma')(1+\gamma'')}\right)>0$$

puisque $\gamma'\geq 1,\ \gamma''\geq 1$ *et* $\left|{}^t\overrightarrow{\beta'}.\overrightarrow{\beta''}\right|<1$.

Donc $\overrightarrow{\beta'}.\,{}^t\overrightarrow{\beta''}=\overrightarrow{\beta''}.\,{}^t\overrightarrow{\beta'}\Rightarrow\overrightarrow{\beta'}.\,{}^t\overrightarrow{\beta''}\cdot\vec{e_i}=\overrightarrow{\beta''}.\,{}^t\overrightarrow{\beta'}\cdot\vec{e_i}=\overrightarrow{\beta'}.\beta''_i=\overrightarrow{\beta''}\cdot\beta'_i$ *pour* $\vec{e_i}=\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Comme $\overrightarrow{\beta''}\neq\vec{0}$ *il existe* i *tel que* $\beta''_i\neq 0$ *et donc* $\overrightarrow{\beta'}=\left(\frac{\beta'_i}{\beta''_i}\right)\overrightarrow{\beta''}$.

Comme $\overrightarrow{\beta'}$ *et* $\overrightarrow{\beta''}$ *sont colinéaires , en applicant la première partie du théorème le produit :*
$M=\Lambda\left(\overrightarrow{\beta'}\right)\cdot\Lambda\left(\overrightarrow{\beta''}\right)=\Lambda\left(\overrightarrow{\beta''}\right)\cdot\Lambda\left(\overrightarrow{\beta'}\right)$ *est une matrice symétrique donc sans rotation .*

***Théorème 2** :*

Si la partie symétrique et la partie orthogonale commutent alors $\vec{\beta}$ *est colinéaire à l'axe de rotation de la partie orthogonale .*

Démonstration :

Si $\Lambda\left(\vec{\beta}\right)\cdot\Omega=\Omega\cdot\Lambda\left(\vec{\beta}\right)$ *comme* $\Omega\cdot\Lambda\left(\vec{\beta}\right)=\Lambda\left({}^t\Omega\vec{\beta}\right)\cdot\Omega$ *par unicité de la décomposition on a*

$^t\mathbf{\Omega}\vec{\boldsymbol\beta} = \vec{\boldsymbol\beta}$.

Remarques :

*(**1**) Considérons le cas où les observateurs **O, O', O''** sont alignés et que les **3** bases associées sont "parallèles" et telles que le premier axe de chacune d'elles soit aligné avec* $\vec{\boldsymbol\beta}$ *:*

On a pour les matrices de changement de base les relations :

$$\begin{bmatrix} \gamma' & \gamma'\cdot\beta' & 0 & 0 \\ \gamma'\cdot\beta' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma''\cdot\beta'' & 0 & 0 \\ \gamma''\cdot\beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma'\cdot\gamma''(1+\beta'\cdot\beta'') & \gamma'\cdot\gamma''(\beta''+\beta') & 0 & 0 \\ \gamma'\cdot\gamma''(\beta''+\beta') & \gamma'\cdot\gamma''(1+\beta'\cdot\beta'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma''\cdot\beta'' & 0 & 0 \\ \gamma''\cdot\beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \gamma' & \gamma'\cdot\beta' & 0 & 0 \\ \gamma'\cdot\beta' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

On voit directement qu'il y a commutativité dans la composition des mouvements .

*(**2**) Même cas mais sans alignement du premier axe sur* $\vec{\boldsymbol\beta}$ *:*

*Les matrices de changement de base sont **2** matrices de Lorentz sans rotation* $\boldsymbol\Lambda(\vec{\boldsymbol\beta'})$ *et* $\boldsymbol\Lambda(\vec{\boldsymbol\beta''})$.

*Puisque les **3** bases sont "parallèles" on peut écrire **:***

$\boldsymbol\Lambda(\vec{\boldsymbol\beta'}).\boldsymbol\Lambda(\vec{\boldsymbol\beta''}) = \boldsymbol P \bullet \boldsymbol\Lambda_0(\vec{\boldsymbol\beta'})\,{}^t\boldsymbol P \bullet \boldsymbol P \bullet \boldsymbol\Lambda_0(\vec{\boldsymbol\beta''}) \bullet {}^t\boldsymbol P$ *où :*

$$\boldsymbol\Lambda_0(\vec{\boldsymbol\beta'}) = \begin{bmatrix} \gamma' & \gamma'\cdot\beta' & 0 & 0 \\ \gamma'\cdot\beta' & \gamma' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol\Lambda_0(\vec{\boldsymbol\beta''})$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma'' & \gamma''\cdot\beta'' & 0 & 0 \\ \gamma''\cdot\beta'' & \gamma'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *et **P** une matrice orthogonale .*

Alors :

$$\boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}).\boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) = P \cdot \boldsymbol{\Lambda}_0(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}_0(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) \cdot {}^tP = P \cdot \boldsymbol{\Lambda}_0(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}_0(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) \cdot {}^tP$$

$$= P \cdot \boldsymbol{\Lambda}_0(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}) {}^tP \cdot P \cdot \boldsymbol{\Lambda}_0(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) \cdot {}^tP = \boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}''}).\boldsymbol{\Lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\beta}'}) \; .$$

Il y a donc commutativité dans la composition des mouvements .

Bibliographie :

Annequin et Boutigny ."Mécanique relativiste ,Exercices ". *Vuibert 1978.*
R.G. Bartle ." Modern theory of integration ".*AMS 2001.*
Berkeley(*Cours de Physique vol 1*) ."Mécanique".*Armand Colin 1972.*
P • Boyer ."Algèbre et Géométries " . *C&M 2015* .
P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968 .
J. Dieudonné."Eléments d'analyse " .*Gauthier − villars 1969* .
F • R • Gantmacher."Théorie des matrices " *• Edition J • Gabay 1990.*
R.Goblot ."Algébre linéaire "*Masson 1995* .
E.Gourgoulhon ."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010* .
J. Grifone."Algèbre Linéaire" *• Cepadues éditions 2002* .
J − B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec."Exercices Algèbre linéaire".*Cepadues éditions 1988* .
D.Langlois."Introduction à la relativité" *• Vuibert 2011.*
J • M Lévy − Leblond • One more derivation of the Lorentz transformation.
American Journal of Physics, *vol* 44, *n* ∘ 3, *March* 1976 *p271* − 277
J.R. Lucas , P.E. Hodgson "Spacetime and electromagnetism " .*Clarenton Press 1990* .
R. Mneimé , F. Testard ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ". *Hermann Paris 1986* .
J - M. Monier."Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .
J.Ph.Pérez ." Relativité et invariance "*Dunod 2011.*
W.Rudin ."Analyse réelle et complexe ".*Masson 1978* .
C • Semay , B • Silvestre - Brac • "Relativité restreinte". *Dunod 2010.*
J - M. Souriau."Calcul Linéaire ".*PUF 1964* .
N.M.J. Woodhouse . " Special Relativity " .*Springer 2002* .

Travaux préparatoires :
https :// *archive • org* / *details* / *version* − 1 *a_202006* / *mode* / 2 *up*
https :// *archive • org* / *details* / *matricesdelorentz*
https :// *archive • org* / *details* / *p_20220209_202202* / *mode* / 2 *up*
https :// *archive • org* / *details* / *une − nouvelle − approche − axiomatique −*
de − la − theorie − de − la − relativite − restreinte − docu / *mode* / 2 *up*
https :// *hal - amu • archives - ouvertes • fr* / *hal* - 02965773 / *document*